Guía de Estudio de Matemáticas para el Examen de Admisión al Programa de Maestría de la Sección de Bioelectrónica, Departamento de Ingeniería Eléctrica.

2017

2. Cálculo Diferencial e Integral.

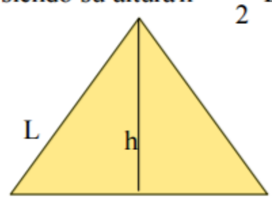
Derivada

Aplicación de la derivada

Ejercicio 1. El área de un *piezoeléctrico* en forma de triángulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2 por minuto. Calcula la rapidez de variación de la longitud de sus lados cuando el área es de 200 cm^2. Se supone que el triángulo se mantiene equilátero en todo instante.

Si llamamos L al lado del triángulo equilátero, siendo su altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ su área A

será:



$$(1) \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

con A=A(t) y L= L(t) .

Se te pide la rapidez de variación de la longitud de los lados por lo que debes calcular $\frac{dL}{dt}$ para A = 200 cm^2.

Derivando respecto de **t** la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}.2L.\frac{dL}{dt} \quad (2)$$

De la expresión (2) debemos despejar $\frac{dL}{dt}$ y sustituir $\frac{dA}{dt}$ y L por sus valores correspondientes al instante en que A = 200 cm^2

De (1): $200 = \frac{\sqrt{3}}{4}.L^2 \Rightarrow L \cong 21.5 \text{ cm}$ y teniendo en cuenta que $\frac{dA}{dt} = -4 \frac{cm^2}{min.}$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dL}{dt} \cong \frac{-8}{21{,}5.\sqrt{3}} \cong -0.21 \ \frac{cm}{min}$$

Los lados están entonces disminuyendo sus longitudes a la velocidad calculada.

Ejercicio 2. Sean dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo. La resistencia equivalente R cumple:

$$R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si R_1 y R_2 aumentan a razón de 0.01 y 0.02 Ω / seg. respectivamente, calcula la razón de cambio de R cuando R_1 = 30Ω y R_2 = 90Ω .

Como $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow R = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$ siendo R , R_1 y R_2 funciones de **t**.

Derivando la última expresión respecto de **t** tendremos:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\left(\frac{dR_1}{dt}.R_2 + R_1.\frac{dR_2}{dt}\right)(R_1 + R_2) - R_1.R_2.\left(\frac{dR_1}{dt} + \frac{dR_2}{dt}\right)}{(R_1 + R_2)^2}$$

Operando y simplificando obtienes:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R_1^2 \cdot \frac{dR_2}{dt} + R_2^2 \cdot \frac{dR_1}{dt}}{(R_1 + R_2)^2}$$

Siendo: $\frac{dR_1}{dt} = 0.01 \ \frac{\Omega}{seg}$ y $\frac{dR_2}{dt} = 0.02 \ \frac{\Omega}{seg}$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 90\Omega$

Sustituyendo valores obtienes:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{900.2.10^{-2} + 8100.10^{-2}}{120^2} \cong 68.75.10^{-4} \ \frac{\Omega}{seg}$$

La resistencia equivalente R está entonces aumentando con la rapidez calculada.

Ejercicio 3. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario C de monóxido de carbono CO_2 en el aire, en partes por millón (ppm) , en una ciudad , está relacionado con la población *p* expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión:

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

El aumento de población en esa ciudad en *t* años se estima que está dado por la relación siguiente:

$$p(t) = 3,1 + 0,1\, t^2 \text{ en miles de habitantes.}$$

¿Con qué rapidez crees que estará variando la concentración de CO_2 en esa ciudad dentro de 3 años?

Como la concentración **C** es función de la población **p** y ésta es función del tiempo **t**, resulta ser **C** función compuesta de **t**.

Debes calcular la derivada de la concentración respecto del tiempo, para lo cual podemos previamente hallar la función compuesta y luego derivar.

Tendremos entonces:

$$C(t) = \sqrt{\frac{\left(3{,}1 + 0{,}1.t^2\right)}{2} + 17}\,.$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dC}{dt} = \frac{2.\left(3{,}1 + 01.t^2\right)0{,}2.t}{2.\sqrt{\frac{\left(3{,}1 + 0{,}1.t^2\right)^2}{2} + 17}}$$

Sustituyendo **t** por su valor 3 y operando resulta: $\frac{dC}{dt}(3) \cong 0{,}24 \quad \frac{\text{p.p.m.}}{\text{año}}$.

Puedes resolver este ejercicio sin necesidad de encontrar la función compuesta como hicimos líneas arriba.

Para ello basta partir de la relación $\quad C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17} \quad$ (1) y tener en cuenta que $p(t)=3.1+0.1.\ t^2$ (2)

Derivando (1) y (2) respecto de **t** obtienes:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{p}{2.\sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}}\frac{dp}{dt} \quad (3) \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dt} = 0.2\,t$$

Para =3 : $\quad p = 4\ , \quad \frac{dp}{dt} = 0.6\,.$

Sustituyendo estos valores en (3) reencontramos $\quad \frac{dC}{dt}(3) = 0.24 \quad \frac{\text{p.p.m}}{\text{año}}.$

Integrales

Ejercicio 1.

Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por la curva

$$(x-1)^2 = 20 - 4y$$

y las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $y = 3$ y a la derecha $x = 1$.

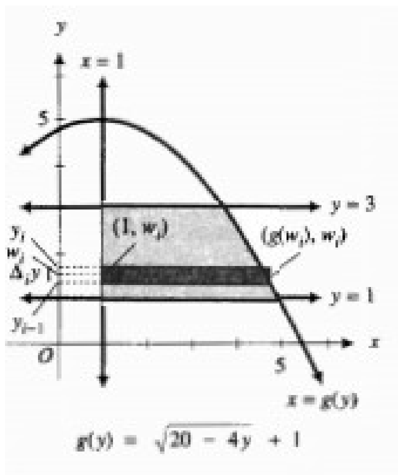


Figura 1

Solución. La figura 1 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 2.

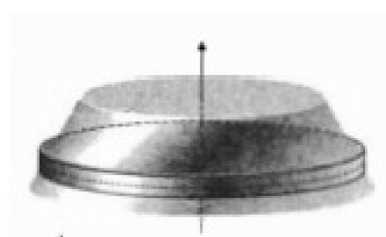


Figura 2

Al resolver la ecuación de la curva se obtiene

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Sea $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Se toma una partición del intervalo $[1, 3]$ del eje y. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo disco, entonces

$$\Delta_i V = \pi[g(w_i) - 1]^2 \Delta_i y$$

$$= \pi[(\sqrt{20-4w}+1)-2]^2 \Delta_i y$$

$$= \pi(20 - 4w_i)\Delta_i y$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4w_i)\Delta_i y \\ &= \pi \int_1^3 (20-4y)dy \\ &= \pi[20y - 2y^2]|_1^3 \\ &= \pi[(60-18)-(20-2)] \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

Conclusión. El volumen del sólido de revolución es de 24π unidades cúbicas.

Teorema 1. *Sean* f *y* g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x *en* $[a, b]$. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido *de revolución generado al girar* alrededor *del eje* x *la región limitada por las curvas* $y = f(x)$ y $y = g(x)$ *y* las rectas $x = a$ *y* $x = b$, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx \end{aligned}$$

Como antes, cuando el eje de revolución es el eje y o cualquier recta paralela al eje x o al eje y, se aplica un teorema semejante al anterior.

Ejercicio 2.

Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x^2 + 3$.

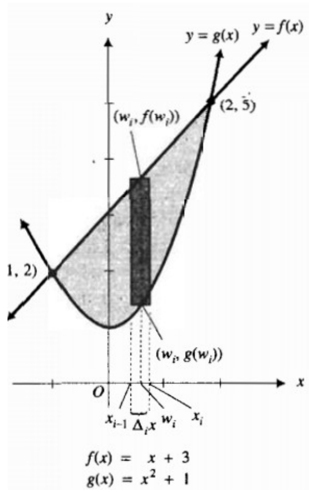


Figura 3

Solución. Los puntos de intersección de las dos curvas son $(-1, 2)$ y $(2, 5)$. La figura 3 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 4.

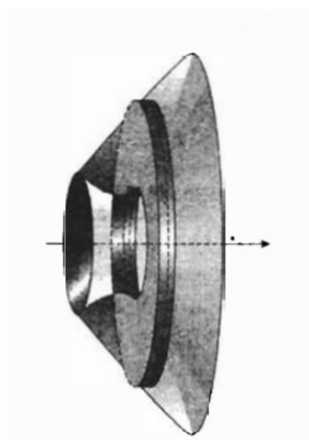


Figura 4

Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces la medida del volumen de la arandela circular es

$$\Delta_i V = \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i x$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)dx \\
&= \pi[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x]_{-1}^{2} \\
&= \pi[(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \frac{117}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Conclusión. El volumen del sólido de revolución es $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas.

Ejercicio 3.

Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por las dos parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$.

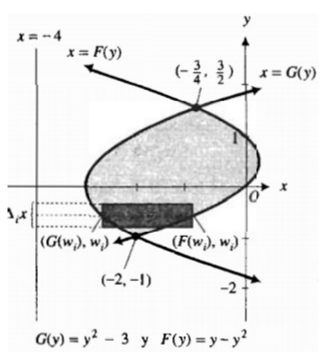


Figura 5

Solución. Las curvas se intersectan en los puntos (-2,-1) y en $\left(\frac{-3}{4}\frac{3}{2}\right)$ y un elemento rectangular de áreas se muestran en la figura 5, la figura 6 presenta el sólido de recolución así como un elemento de volumen, el cuál es una arandela.

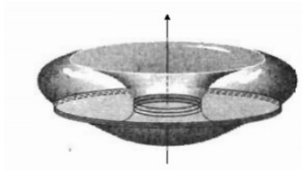


Figura 6

Sean $F(y) = y - y^2$ y $G(y) = y^2 - 3$. El número de unidades cúbicas del volumen de la arandela circular

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(w_i)]^2 - [4 + G(w_i)]^2)\Delta_i y$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 - F(w_i)]^2 - [4 - G(w_i)]^2)\Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2] dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15) dy \\
&= \pi [\frac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15]_{-1}^{3/2} \\
&= \frac{875}{32}\pi
\end{aligned}$$

Conclusión. El volumen sólido de revolución es $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas.

Ejercicio 4. Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar al rededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$ y la recta $y = 2$.

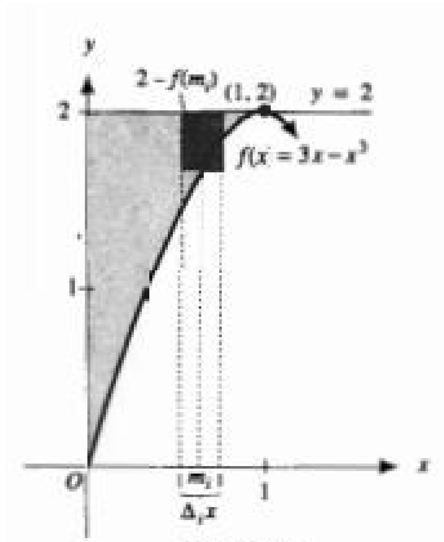


FIGURA 7

Solución. Sea f (x) = $3x - x^3$. La figura 7 muestra la región y un elemento rectangular de área paralelo al eje y. El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se presenta en la figura 8. El radio medio de la capa cilíndrica es mi unidades, la altura es $[2 - f(m_i)]$ unidades y el espesor es $\Delta_i x$ unidades. Por lo tanto, si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la capa cilíndrica, entonces.

$$\Delta_i V = 2\pi m_i [2 - f(m_i)]\Delta_i x$$

De modo que su V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución entonces.

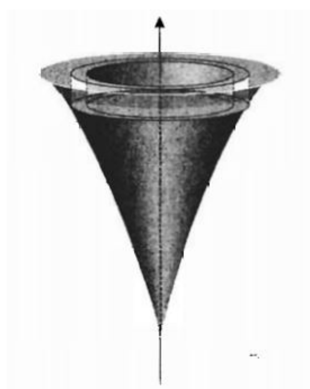


Figura 8

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i [2 - f(m_i)] \Delta_i x \\
&= 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x(2 - 3x + x^3)dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)dx \\
&= 2\pi [x^2 - x^3 \frac{x^5}{5}]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Conclusión. El volumen del sólido es 2/5 π unidades cúbicas.

Ejercicio 5.

La región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor de la recta $y = -3$. Obtenga el volumen del sólido generado al considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.

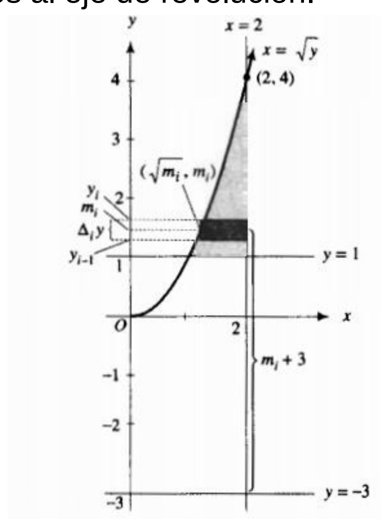


Figura 9

Solución. La región y un elemento rectangular de área se muestran en la figura 9.

La ecuación de la curva es $y = x^2$. Al resolver esta ecuación para x se obtiene $x = \pm\sqrt{y}$. Como $x > 0$ para la región dada, entonces $x = \sqrt{y}$.

El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se muestran en la figura 10. El radio exterior de la capa cilíndrica es (y_i + 3) unidades, mientras que el radio interior es (y_i−1 + 3) unidades. En consecuencia, el radio medio es (m_i − 3) unidades. Como la altura y el espesor de la capa cilíndrica son, respectivamente, (2 − $\sqrt{m_i}$) unidades y Δ_i y unidades, entonces.

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\Delta_i y$$

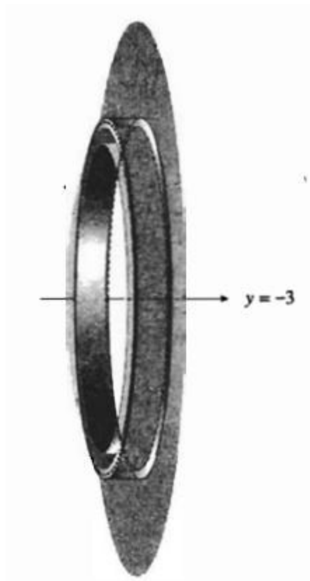


Figura 10

En consecuencia, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\Delta_i y \\ &= \int_1^4 2\pi(y+3)(2-\sqrt{y})dy \\ &= 2\pi \int_1^4 (-y^{3/2} + 2y - 3y^{1/2} + 6)dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{5}{2}y^{5/2} + y^2 - 2y^{3/2} + 6y \right]_1^4 \\ &= \frac{66}{5}\pi \end{aligned}$$

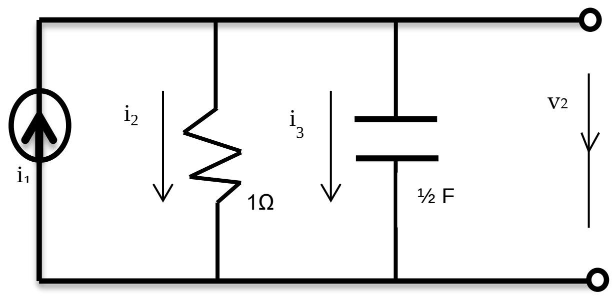
Conclusión. El volumen del sólido es *66/5 π* unidades cúbicas.

Referencias

[1] L. Leithold, El Cálculo. Oxford University Press - Harla México S.A de C.V, séptima ed., 1998.

Transformada de Fourier

Utilizando la transformada de Fourier, determinar el voltaje V_2 (t) de la siguiente red



Aplicando la ley de Kirschhoff para corriente

$$i = i_2 + i_3$$

$$i2 = \frac{v_2}{R}, \qquad i3 = c\, dv_2 \frac{(t)}{dt}$$

Para

$$i_1 = \frac{v2}{R} + c\,\frac{dv2(t)}{dt}$$

Para aplicar la transformada de Fourier

$$F(t)\{f(t)\} = F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$I_1\,(jw) = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} v_2\,(t)\,e^{-j\omega t}\,dt + c\,F\left\{\frac{dv_2(t)}{dt}\right\}$$

La transformada de una derivada:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\,e^{j\omega t}dt$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} jw\,F(jw)\,e^{j\omega t}dt$$

$$F\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = jw\,F(jw)$$

$$I_1(jw) = \frac{1}{R}\,v_2(jw) + jw\,c\,v_2\,(jw)$$

$$I_1(jw) = v_2(jw) + \frac{1}{2}\,jw\,v_2(jw)$$

$$I_1(jw) = v_2(jw)(1 + \frac{1}{2} jw)$$

$$I_1(jw) = v_2(jw)\left(\frac{2 + jw}{2}\right)$$

Se propone que la corriente $i_1(t) = 2\ e^{-t}\ u(t)$

por lo tanto $I_1(jw) = \frac{2}{jw+1}$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{2}{jw + 1} = v_2(jw)(\frac{2 + jw}{2})$$

$$v_2(jw) = \frac{4}{(jw + 1)(jw + 2)}$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$4\frac{1}{(jw + 1)(jw + 2)} = 4\left[\frac{A}{jw + 1} + \frac{B}{jw + 2}\right]$$

$$A = \left.\frac{1}{jw + 2}\right|_{jw=-1} = 1$$

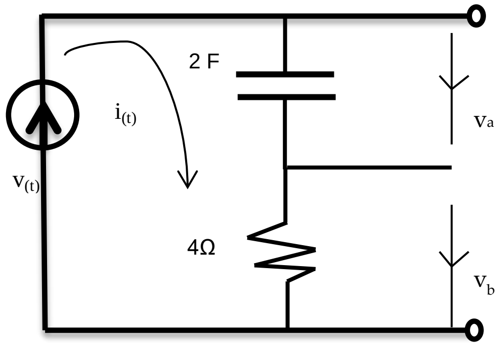
$$B = \left.\frac{1}{jw + 1}\right|_{jw=-2} = -1$$

$$v_2(jw) = \frac{4}{jw + 1} - \frac{4}{jw + 2}$$

$$v_2(t) = F^{-1}\{v_2(jw)\}$$

$$= 4e^{-t} - 4e^{-2t}$$

Utilizando la transformada de Fourier determinar los voltajes v_a y v_b. El voltaje de excitación es $v(t) = 3\, e^{-t} u(t)$



$$\tilde{F}\{v(t)\} = \tilde{F}(3e^{-t}u(t)) = \frac{3}{jw+1}$$

$$\frac{1}{c}\int i(t)dt + 4\, i(t) = v(t)$$

$$\frac{1}{cjw}\, I(jw) + 4\, I(jw) = \frac{3}{jw+1}$$

$$I(jw)(\frac{1}{cjw} + 4\,) = \frac{3}{(jw+1)}$$

$$I(jw)\left(\frac{1+4jw}{cjw}\right) = \frac{3}{(jw+1)}$$

$$I(jw) = \frac{3cjw}{(jw+1)(4jw+1)}$$

$$V_a(jw) = \frac{1}{\cancel{cjw}} \quad \frac{3\ \cancel{cjw}}{(jw+1)(4jw+1)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{(jw+1)\left(jw+\frac{1}{4}\right)}$$

Resolver transformada inversa

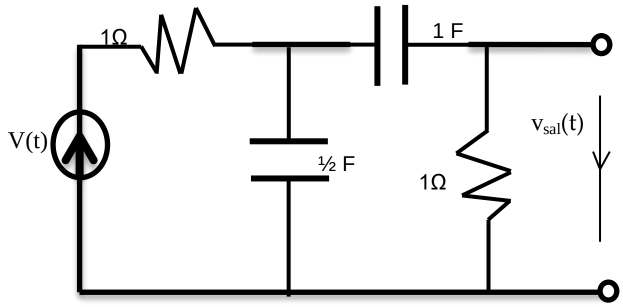
$$V_b(jw) = 4\, I(jw)$$

$$= 4\frac{3c\ jw}{(jw+1)(4jw+1)}$$

$$= \frac{3cjw}{(jw+1)\left(jw+\frac{1}{4}\right)}$$

Resolver con la transformada inversa

Utilizando la transformada de Fourier determinar $v_{sal}(t)$



$$v(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos

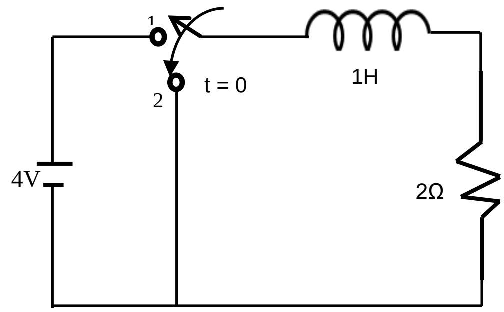
Impedancias transformadas de los elementos

t	**s**
R	R
C	$\frac{1}{CS}$
L	LS

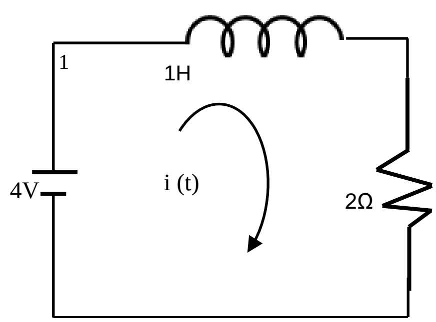
Admitancias

t	**s**
$\frac{1}{\mathrm{R}}$	$\frac{1}{\mathrm{R}}$
C	CS
L	$\frac{1}{LS}$

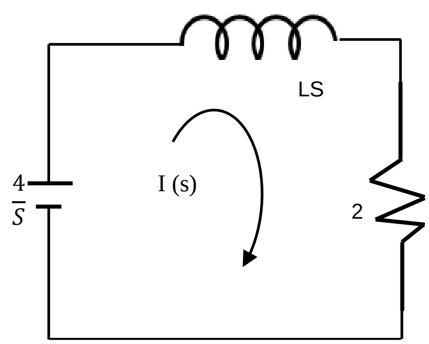
Ejercicio, determinar la corriente en el circuito para $t \geq 0$ utilizando la transformada de Laplace.



Considérese que desde $t = -\infty$ hasta $t = 0$ el interruptor se encuentra en posición 1:



Transformando a Laplace como impedancias



$$LS\, I(s) + 2\, I(s) = 4/S$$

$$I(s)(LS + 2) = \frac{4}{S}$$

$$I(s) = \frac{4}{S\,(S + 2)}$$

A C. D. la inductancia se carga a un valor de corriente. Para saber a qué valor de corriente se cargó se aplica el teorema del valor final.

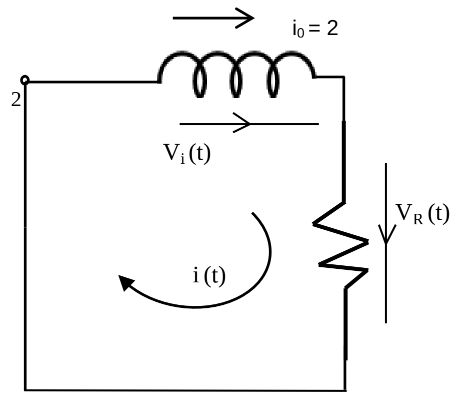
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \operatorname*{Lim}_{S\to 0} S\, X(s)$$

$$=> \lim_{t\to\infty} i(t) = \operatorname*{Lim}_{S\to 0} S\, I(s)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{S\to 0} \frac{\cancel{S}\, 4}{\cancel{S}\,(S+2)}$$

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} i(t) = 2\, Amp$$

Este es el valor de corriente almacenado en la bobina. Tomamos un nuevo tiempo de referencia *t = 0*, cuando el interruptor pasa a la posición 2.



Retomando la definición de voltaje en la bobina

$$V_L(t) = \frac{d\, i(t)}{dt}$$

Transformando a Laplace

$$V_L(s) = \int_0^\infty L\, \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= L \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Resolviendo por partes la integral

$$\int_a^b u\, dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

$$u = e^{-st}, \qquad dv = di(t)$$

$$du = -s\, e^{-st} dt, \quad v = i(t)$$

$$T.L.\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = e^{-st} i(t)|_0^\infty \quad + S\int_0^\infty i(t)\, e^{-st} dt$$

$$= s\, I(s) - i(0^-)$$

$$V_L(s) = Ls\, I(s) - L\, i(0^-)$$

del circuito $V_L(s) + V_R(s) = 0$

LS I(s) – L i(0^-) + R I(s) = 0

$$I(s)(R + LS) = Li\,(0^-)$$

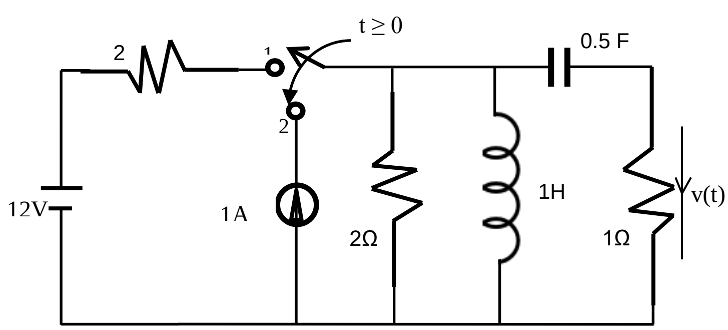
$$I(s) = \frac{L\, i(0^-)}{LS + R} \quad con\; i(0^-) = 2A$$

$$I(s) = \frac{i(0^-)}{s + \frac{R}{L}}$$

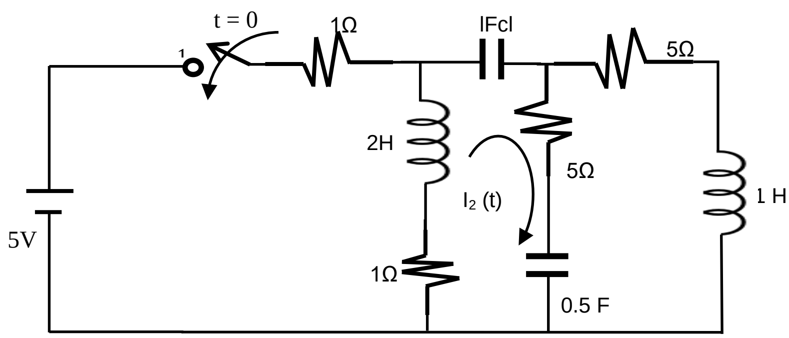
$$i(t) = i\,(0^-)\; e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = 2\, e^{-2t}$$

Utilizando la transformada de Laplace determine *v(t)* para *t ≥ 0*



Utilizando la transformada de Laplace, determinar $i_2(t)$



Función de Transferencia H(s)

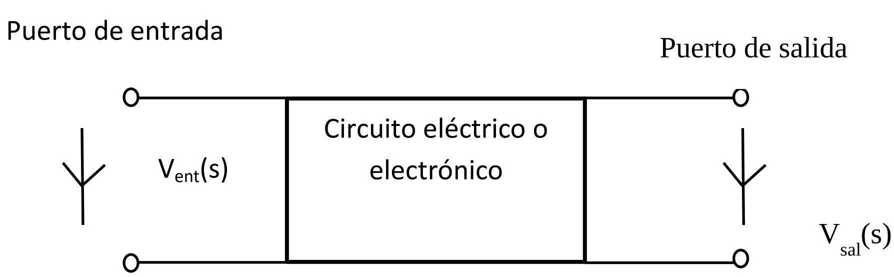
Función de Transferencia es la representación matemática del funcionamiento de un circuito. Para determinar la H(s) de un circuito, es necesario declarar un par de puertos, uno que es por donde se excita el circuito y otro puerto por donde se determina la salida. Las H(s) pueden ser

$$H(s) = \frac{V_{sal}(s)}{V_{ent}(s)}$$

$$H(s) = \frac{I_{sal}(s)}{I_{ent}(s)}$$

$H(s) = \frac{V_{sal}}{I_{ent}}$ Impedancia, Función de transferencia

$H(s) = \frac{I_{ent}}{V_{sal}}$ admitancia



Normalmente para determinar la H(s), el sistema se excita con una función delta directa.

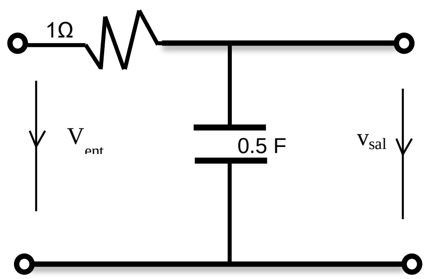
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

En este caso la transformada inversa de H(s), es decir h(t) se conoce como respuesta a impulso unitario, h (t).

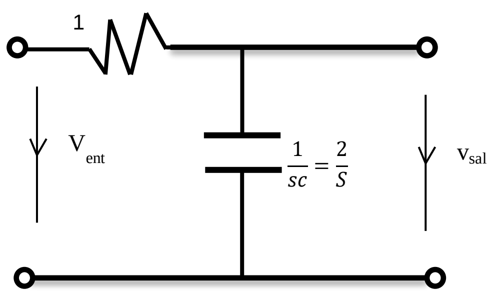
Es importante mencionar, que conocida la ecuación de la función de transferencia, es posible determinar la salida para cualquier entrada.

Ejemplo

Determinar la función de transferencia

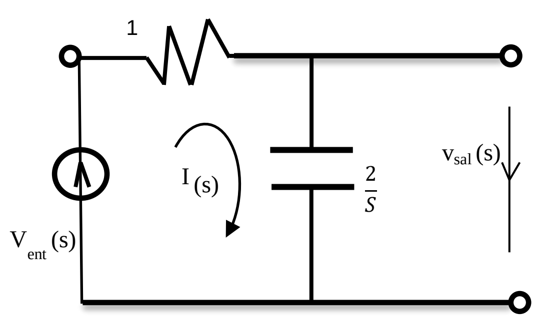


Transformando los elementos como impedancias



Aplicando una fuente al puerto de entrada:

V_{ent} (s)



$$I(s)+\frac{2}{S}\,I(s)=Vent(s)$$

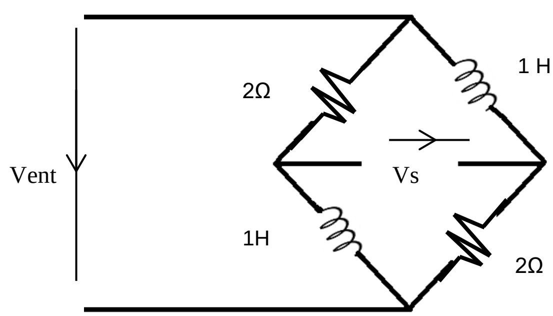
$$I(s)\left(1+\frac{2}{S}\right)=Vent\ (s)$$

$$I\ (s)=\ \frac{Vent\ (t)}{1+\frac{2}{S}}$$

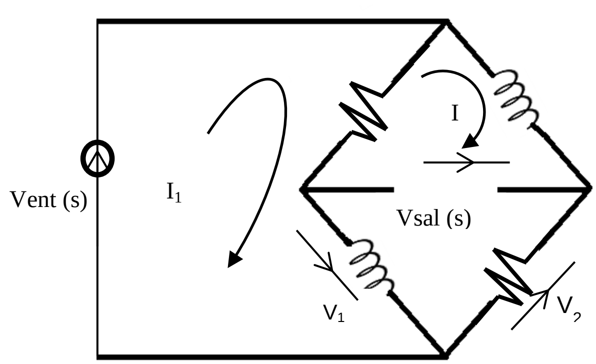
$$Vsal(s)=\ \frac{2}{S}\cdot\frac{Vent\ (t)}{1+\frac{2}{S}}=\frac{2\,Vent(s)}{S+2}$$

$$\therefore H(s)\frac{Vsal}{Vent}=\ \frac{2}{s+2}$$

Determinar la función de transferencia



Remplazando los elementos por sus impedancias transformadas y aplicando una fuente de voltaje en el puerto de entrada.



$$I_1(2+s)-I_2(2+s)=Vent(s)\cdots(a)$$

$$-I_1(2+s)+I_2(4+2s)=0\qquad\cdots(b)$$

Sumando (a) y (b)

$$I_2(s)(-2 - s + 4 + 2s) = Vent(s)$$

$$I_2(s)(2 + s) = Vent(s)$$

$$I_2(s) = \frac{Vent(s)}{(s+2)}$$

De la ecuación (b)

$$I_1(s)(2 + s) = I_2(4 + 2s)$$

$$I_1(s)(2 + s) = \frac{Vent(s)}{s+2}(4 + 2s)$$

$$I_1(s)(2 + s) = 2\frac{Vent(s)(\cancel{s+2})}{\cancel{s+2}} => \ I_1(s) = \frac{2\,Vent\,(s)}{2+s}$$

$$Vsal(s) = V_1(s) + V_2(s)$$

$$V_1(s) = S\,(I_1 - I_2)$$

$$V_2(s) = -2I_2$$

$$Vsal(s) = S\,(I_1 - I_2) \quad - 2I_2$$

$$= S\,I_1 - I_2(2 + S)$$

$$Vsal(s) = S\left(\frac{2\ \ Vent(s)}{2+S}\right) - (\cancel{2+S})\frac{Vent(s)}{\cancel{S+2}}$$

$$Vsal(s) = Vent(s)(\frac{2S}{S+2} - 1)$$

$$Vsal(s) = Vent(s)(\frac{2S - S - 2}{S+2})$$

$$Vsal(s) = Vent(s)(\frac{S-2}{S+2})$$

$$H(s) = \ \frac{Vsal}{Vent} = \ \frac{S-2}{S+2}$$

Polos y ceros

La ubicación de polos y ceros en un plano complejo, determina el comportamiento del sistema. Consideremos que la H(s) normalmente es una relación de dos polinomios

$$H(s) = \frac{P_N(s)}{P_D(s)}$$

Con P_N en el polinomio del numerador y P_D el polinomio del denominador.

Las raíces de P_N (s) son los ceros de la función y las raíces de P_D(s) son los polos de la función conocidas las raíces los polinomios pueden ser factorizados.

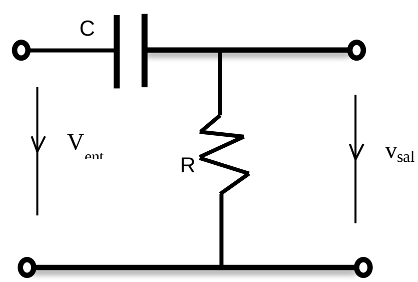
$$H(s) = \frac{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)\cdots}{(s + b_1)(s + b_2)(s + b_3)\cdots}$$

Donde s= $-a_1$, s= $-a_2$, s=$-a_3$ … son los ceros de la función y,

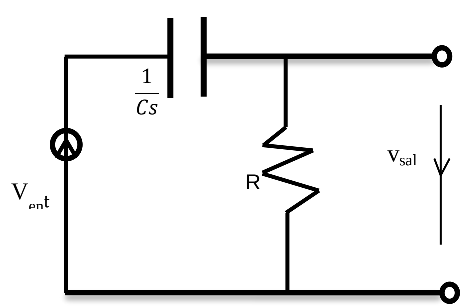
s= $-b_1$, s= $-b_2$, s=$-b_3$ … son los polos de la función

si a_1 y $b_1$son reales, las raíces serán reales y diferentes

Ejemplo, determinar los polos y ceros del siguiente sistema



Transformando a impedancias



Por divisor de voltaje:

$$Vsal = \frac{R \ Vent(s)}{R + \frac{1}{Cs}}$$

$$H(s) = \frac{Vsal}{Vent} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}}$$

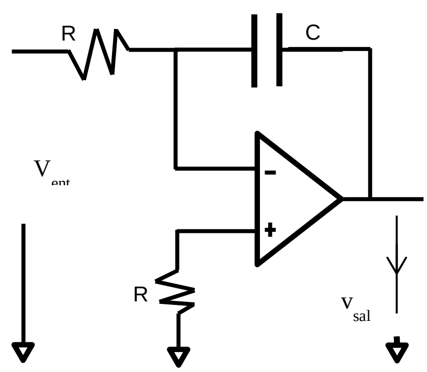
$$= \frac{RCs}{RCs + 1}$$

$$= \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

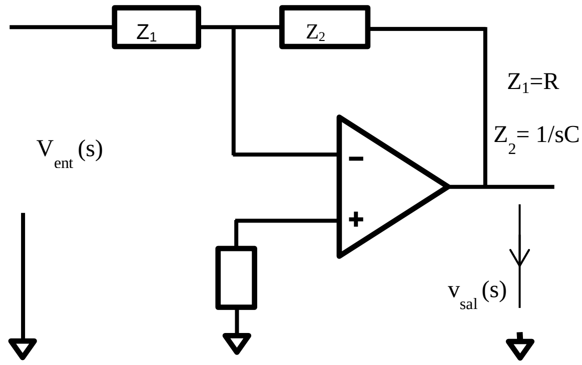
El sistema tiene un cero en el origen y un polo en s= -1/RC

Determinar la H(s), encuentre polos y ceros.

¿Qué tipo de filtro es?



Sustituyendo por las impedancias transformadas

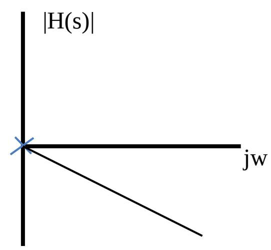


La ganancia del circuito se define como

$$Vsal\ (s) = -\frac{Z_2}{Z_1}\, Vent(s)$$

$$H(s) = \frac{Vsal(s)}{Vent(s)} = -\frac{\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{1}{RCs}$$

El polo se encuentra en el origen



Se comporta como un filtro pasa bajas

3. Vectores y Análisis Vectorial.

Conceptos Básicos de Vectores

Ejercicio 1. Las fuerzas F_1, F_2, …, F_6 actúan sobre un objeto *P*, como se ilustra en la figura 1a. Calcule la fuerza que se necesita para impedir que *P* se mueva.

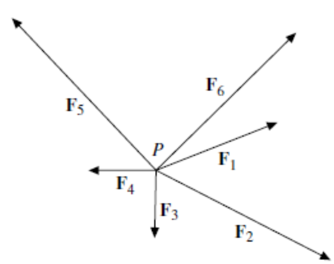


Figura 1a

Solución

Como el orden de la suma de vectores es irrelevante, podemos comenzar con cualquier vector, digamos $\mathbf{F}_1$. A $\mathbf{F}_1$ hay que sumarle $\mathbf{F}_2$, luego $\mathbf{F}_3$ y así sucesivamente, como se ilustra en la figura 1b. El vector que se dibuje a partir del punto inicial de $\mathbf{F}_1$ hasta el punto terminal de $\mathbf{F}_6$ es la resultante **R**, es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_6$. La fuerza necesaria para impedir que *P* se mueva es -**R**, que a veces recibe el nombre de *equilibrante.*

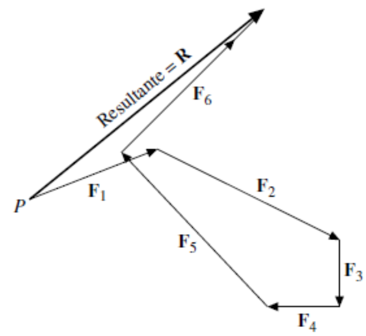


Figura 1b

<u>Ejercicio 2</u>. Considere los puntos P(2,4,3) y Q(1, 25,2) en el espacio $\mathbf{R}^3$ tridimensional, como se aprecia en la figura 2a. A) Encuentre los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ para P y Q en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. B) Determine en forma gráfica y analítica la resultante de estos vectores de posición.

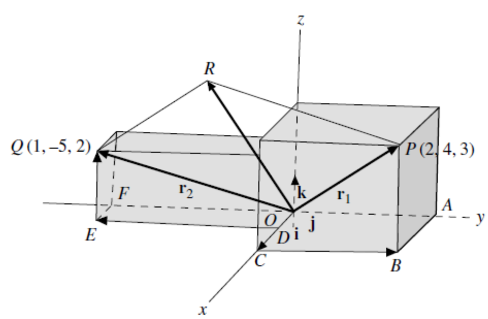


Figura 2

<u>Solución</u>

A) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BP} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2 = \mathbf{OQ} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EQ} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

B) En forma gráfica, la resultante de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se obtiene como la diagonal OR del paralelogramo OPRQ. En forma analítica, la resultante de **r**1 y **r**2 está dada por:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

<u>Ejercicio 3</u>. Demuestre que la magnitud del vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, que se ilustra en la figura 3, demuestre que $|A| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$

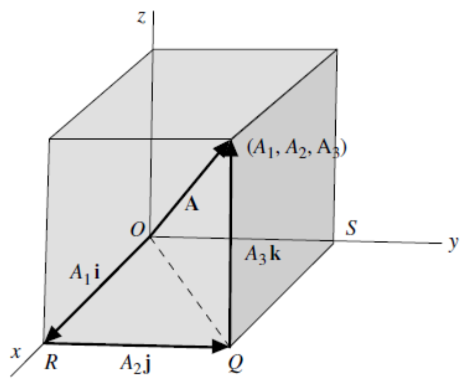


Figura 3

Solución

Por el teorema de Pitágoras las magnitudes de los vectores están dadas por:

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2$$

Del mismo modo, $(OQ)^2 = (OR)^2 + (RQ)^2$ y por tanto: $(OP)^2 = (OR)^2 + (RQ)^2 + (QP)^2$

Que también puede expresarse como: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{A}_2^2 + \boldsymbol{A}_3^2$ que también se puede expresar como

$$|\boldsymbol{A}| = (\boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{A}_2^2 + \boldsymbol{A}_3^2)^{1/2}$$

Ejercicios Adicionales

1. Determine cuáles de los siguientes son escalares y cuáles son vectores: a) Energía cinética, b) intensidad de campo eléctrico, c) entropía, d) trabajo, e) fuerza centrífuga, f) temperatura, g) carga, h) esfuerzo cortante, i) frecuencia.

2. Un aeroplano viaja 200 millas hacia el oeste, y luego 150 millas a 60° hacia el noroeste. Determine el desplazamiento resultante.

3. Suponga que **ABCDEF** son los vértices de un hexágono regular. Encuentre la resultante de las fuerzas representadas por los vectores **AB**, **AC**, **AD**, **AE** y **AF**.
4. Considere los vectores **A** y **B**. Demuestre que: *a*) |**A** + **B**| ≤ |**A**| + |**B**|; *b*) |**A** - **B**| ≥ |**A**| +|**B**|.

5. Demuestre que |**A** + **B** + **C**| ≤ |**A**| + |**B**| + |**C**|.

6. Dos ciudades, **A** y **B**, están situadas en oposición directa sobre las orillas de un río cuyo ancho es de 8 millas y luye con una velocidad de 4 mi/h. Un hombre ubicado en **A** desea llegar a la ciudad **C** que está corriente arriba a 6 millas de la ciudad **B** y en el mismo lado que ésta. Si su embarcación viaja con una velocidad máxima de 10 mi/h y si desea llegar a **C** en el menor tiempo posible, ¿qué dirección debe seguir y cuánto tiempo durará el viaje?

7. Simplifique la expresión: $2\mathbf{A} + \mathbf{B} + 3\mathbf{C} - \{\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{C})\}$.

8. Considere vectores no colineales **a** y **b**. Suponga

$$\mathbf{A} = (x + 4y)\mathbf{a} + (2\mathbf{x} + \mathbf{y} + 1)\mathbf{b} \text{ y } \mathbf{B} = (\mathbf{y} - 2\mathbf{x} + 2)\mathbf{a} + (2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 1)\mathbf{b}$$

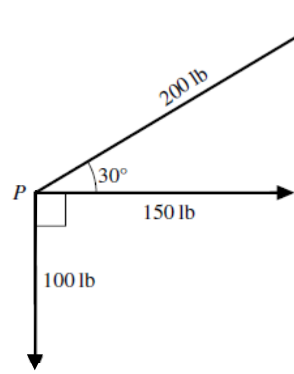
Encuentre **x** e **y** tales que $3\mathbf{A} = 2\mathbf{B}$.

9. Los vectores básicos $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ están dados en términos de los vectores básicos $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$ por las relaciones

$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$

Suponga que $\mathbf{F} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$. Exprese **F** en términos de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

10. Sobre un objeto P actúan tres fuerzas coplanares, como se ilustra en la figura. Calcule la fuerza necesaria para impedir que P se mueva.



11. Suponga que **a**, **b** y **c** son vectores no coplanares. Determine si los vectores siguientes tienen independencia o dependencia lineal:

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \quad r_3 = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

12. a) Si **O** es un punto dentro del triángulo **ABC** y **P**, **Q** y **R** son los puntos medios de los lados **AB**, **BC** y **CA**, respectivamente, demuestre que **OA** + **OB** + **OC** = **OP** + **OQ** + **OR**.
b) ¿El resultado es el mismo si **O** es cualquier punto fuera del triángulo? Demuestre su respuesta.

13. Sea que los vectores de posición de los puntos **P** y **Q** relativos al origen **O** están dados por los vectores **p** y **q**, respectivamente. Suponga que **R** es un punto que divide a **PQ** en segmentos que están en la razón m:n. Demuestre que el vector de posición de **R** está dado por **r** = (m**p** + n**q**)/(m + n) y que es independiente del origen.

14. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados **A**, **B** y **C**, que no están en la misma recta y tienen vectores de posición **a**, **b** y **c** relativos a un origen **O**, se pueden escribir como: $\mathbf{r} = \frac{\mathrm{m}\mathbf{a}+\mathrm{n}\mathbf{b}+\mathrm{p}\mathbf{c}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{p}}$
donde **m**, **n** y **p** son escalares. Verifique que la ecuación es independiente del origen.

15. a) Demuestre que los vectores **A** = 3**i** + **j** **-** 2**k**, **B** = **-i** + 3**j** + 4**k**, **C** = 4**i** **-** 2**j** **-** 6**k** pueden formar los lados de un triángulo.
b) Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo.

Operaciones Vectoriales

Ejercicio 1. Encuentre la proyección del vector **A** = **i** **-** 2**j** + 3**k** sobre el vector **B** = **i** + 2**j** + 2**k**.

Solución

Primero es necesario encontrar un vector unitario **b** en la dirección de **B**

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/(1^2 + 2^2 + 2^2)^{1/2} = \mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3 + 2\mathbf{k}/3$$

La proyección de A sobre B, queda establecida mediante:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3 + 2\mathbf{k}/3) = (1)(1/3) + (-2)(2/3) + (3)(2/3) = 1$$

Ejercicio 2. Encuentre una ecuación del plano perpendicular al vector **A** = 2**i** **-** 3**j** + 6**k** y que pasa por el punto terminal del vector **B** = **i** + 2**j** + 3**k** (Vea la figura 4). Del mismo modo calcule la distancia del plano al origen ***O***.

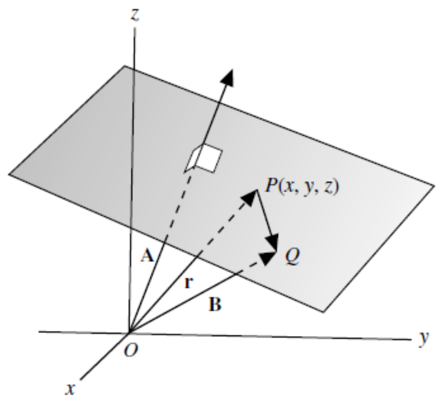


Figura 4

Solución

Como **PQ** = **B - r** es perpendicular a **A**, tenemos que (**B - r**) $\cdot$**A** = 0, es decir que **r** $\cdot$ **A** = **B** $\cdot$ **A** es la ecuación requerida del plano en forma vectorial. En forma rectangular se convierte en:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

o bien

$$2x - 3y + 6z = 2 - 6 + 18 = 14$$

La distancia del origen al plano es la proyección de **B** sobre **A**. Un vector unitario en la dirección de **A** es:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}| = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/(2^2 + (-3)^2 + 6^2)^{1/2} = 2\mathbf{i}/7 - 3\mathbf{j}/7 + 6\mathbf{k}/7$$

De esta forma la proyección de B sobre A es:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i}/7 - 3\mathbf{j}/7 + 6\mathbf{k}/7) = (1)(2/7) + (2)(-3/7) + (3)(6/7) = 2$$

Ejercicio 3. Demuestre que *a*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ y *b*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

Solución

a) Sean $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\
&= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times ([B_2C_3 - B_3C_2]\mathbf{i} + [B_3C_1 - B_1C_3]\mathbf{j} + [B_1C_2 - B_2C_1]\mathbf{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_2C_3 - B_3C_2 & B_3C_1 - B_1C_3 & B_1C_2 - B_2C_1 \end{vmatrix} \\
&= (A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_3B_1C_3)\mathbf{i} + (A_3B_2C_3 - A_3B_3C_2 - A_1B_1C_2 + A_1B_2C_1)\mathbf{j} \\
&\quad + (A_1B_3C_1 - A_1B_1C_3 - A_2B_2C_3 + A_2B_3C_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k})(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\
&= (A_2B_1C_2 + A_3B_1C_3 - A_2C_1B_2 - A_3C_1B_3)\mathbf{i} + (B_2A_1C_1 + B_2A_3C_3 - C_2A_1B_1 - C_2A_3B_3)\mathbf{j} \\
&\quad + (B_3A_1C_1 + B_3A_2C_2 - C_3A_1B_1 - C_3A_2B_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, después de reemplazar **A**, **B** y **C** del inciso *a)* por **C**, **A** y **B**, respectivamente.

Observe que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$, es decir, la ley asociativa para el producto cruz de vectores no es válida para todos los vectores **A**, **B** y **C**.

Ejercicios Adicionales

1. Suponga que **A** = **i** + 3**j** - 2**k** y **B** = 4**i** - 2**j** + 4**k**. Calcule a) **A** · **B**, b) **A**, c) **B**, d) |3**A** + 2**B**|, e) (2**A** + **B**) · (**A** - 2**B**).

2. Encuentre el ángulo entre: a) **A** = 3**i** + 2**j** - 6**k** y **B** = 4**i** - 3**j** + **k**; b) **C** = 4**i** - 2**j** + 4**k** y **D** = 3**i** - 6**j** - 2**k**.

3. Diga cuál es la proyección del vector **A** sobre el vector **B**, donde: a) **A** = 2**i** - 3**j** + 6**k** y **B** = **i** + 2**j** + 2**k**, b) **A** = 2**i** + **j** - **k** y **B** = -6**i** + 2**j** - 3**k**.

4. Encuentre la proyección del vector **A** = 4**i** - 3**j** + **k** sobre la línea que pasa por los puntos (2, 3, -1) y (-2, -4, 3).

5. Encuentre un vector unitario paralelo al plano **xy** y perpendicular al vector 4**i** - 3**j** + **k**.

6. Demuestre que **A**, **B** y **C** son vectores unitarios mutuamente ortogonales, donde

a) $\mathbf{A} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/3$, $\mathbf{B} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/3$ y $\mathbf{C} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

b) $\mathbf{A} = (12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})/13$, $\mathbf{B} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k})/13$ y $\mathbf{C} = (3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/13$.

7. Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son los vectores de posición de los puntos **P** y **Q**, respectivamente.
Encuentre una ecuación para el plano que pasa por **Q** y es perpendicular a la recta **PQ**.
Calcule la distancia del punto (-1, 1, 1) al plano.

8. Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine: a) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$, b) $(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \times (2\mathbf{A} - \mathbf{B})$ y
c) $|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})|$.

9. Suponga que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y que cada una de las condiciones siguientes se cumplen simultáneamente; a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ y b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$. Demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, pero si sólo se cumple una de las condiciones entonces necesariamente $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

10. Suponga que $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Encuentre un vector de magnitud 5 que sea perpendicular tanto a **A** como a **B**.

11. Determine la constante a que hace que los vectores siguientes sean coplanares:
a) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, b) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $6\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

12. Sea que los puntos **P**, **Q** y **R** tienen vectores de posición $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, relativos al origen **O**. Encuentre la distancia de **P** al plano **OQR**.

13. Determine la distancia más corta: a) de (6, -4, 4) a la línea que une los puntos (2, 1, 2) y (3, -1, 4). b) de
(1, -7, 5) a la recta que pasa por los puntos (13, -12, 5) y (23, 12, 5).

14. Considere los puntos **P**(2, 1, 3), **Q**(1, 2, 1), **R**(-1, -1, -2) y **S**(1, -4, 0). Encuentre la distancia más corta entre las rectas **PQ** y **RS**.

15. Encuentre un conjunto de vectores recíprocos al conjunto de vectores:
a) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, b) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $5\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

5 Análisis Numérico

Método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & c_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & c_2^* \\ 0 & 0 & 1 & & c_3^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & & & & = & c_1^* \\ & x_2 & & \vdots & = & c_2^* \\ & & x_3 & & = & c_3^* \end{matrix}$$

Esquema gráfico del método de Gauss –Jordan . Los asteriscos indican que el vector de términos se ha modificado varias veces.

EJEMPLO Método de Gauss –Jordan

Enunciado del problema: úsese el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$3x_1 – 0.1x_2 – 0.2x_3 = 7.85$

$0.1x_1 + 7x_2 – 0.3x_3 = –19.3$

$0,3x_1 – 0.x_2 + 10x_3 = 71.4$

Solución: en primer lugar, se expresan los coeficientes y el vector de términos independientes como una matriz aumentada;

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71 \end{bmatrix}$$

En seguida se normaliza el primer renglón dividiendo por el pivote 3. Para obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.033\,333\,3 & -0.066\,666\,7 & & 2\,616\,67 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & \vdots & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & & 71.4 \end{bmatrix}$$

El término $x_1$se puede eliminar del segundo renglón restando 0.1 veces el primero del segundo renglón. De una manera similar, restando 0.3 veces el primero del tercer renglón se elimina el término con x_1 del tercer renglón:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.033\,333\,3 & -0.066\,666\,7 & & 2.616\,67 \\ 0 & 7.003\,33 & -0.293\,333 & \vdots & -19.561\,7 \\ 0 & -0.190\,000 & 10.020\,0 & & 70.615\ \ 0 \end{bmatrix}$$

En seguida se normaliza el segundo renglón dividiendo entre 7.003 33:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.033\,333\,3 & -0.066\,666\,7 & & 2.616\,67 \\ 0 & 1 & -0.041\,884\,8 & \vdots & -2.793\,20 \\ 0 & -0.190\,000 & 10.020\,0 & & 70.615\ \ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo los términos en x_2 de la primera y la tercera ecuación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.068\,062\,9 & & 2.523\,56 \\ 0 & 1 & -0.041\,884\,8 & \vdots & -2.793\,20 \\ 0 & 0 & 1 & & 7.000\,03 \end{bmatrix}$$

Finalmente los términos con x_3 se pueden reducir de la primera y segunda ecuación para obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3.000\ 00 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2.500\ 01 \\ 0 & 0 & 1 & & 7.000\ 03 \end{bmatrix}$$

De esta forma, como se muestra en la figura 8.1, la matriz de coeficientes se ha transformado en la matriz identidad y la solución se ha obtenido en el vector de términos independientes, Nótese que no se necesita sustitución hacia atrás para obtener la solución.

Gauss-Jordan con inversión de matrices

$$\begin{array}{c} \quad [A] \qquad\qquad\qquad [I] \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \vdots & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \vdots & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{bmatrix} \\ \quad [I] \qquad\qquad\qquad [A]^{-1} \end{array}$$

Esquema gráfico del método de Gauss-Jordan, con inversión de matrices.

Con el método de Gauss-Jordan se puede calcular directamente la inversa. Para hacerlo, la matriz de coeficientes se aumenta con una matriz identidad. Posteriormente se aplica el método de Gauss-Jordan para reducir la matriz identidad. Cuando se completa esta tarea, el lado derecho de la matriz aumentada contiene la matriz inversa. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO

El uso del método de Gauss-Jordan en el cálculo de la matriz inversa

Enunciando el problema: determínese la matriz inversa del. Obténgase la solución multiplicando $[A]^{-1}$. Por el vector de términos independientes: $[C]^T$ = $[7.85 \quad -19.3 \quad 71.4]$. Además, obténgase la solución para un vector de términos independientes diferente: $[C]^T$ = $[20 \quad 50 \quad 15]$.

Solución: auméntese la matriz de coeficientes con una matriz identidad:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -0.1 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Usando a_{11} como pivote, el renglón 1 se normaliza y se usa para eliminar a x_1 de los otros renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.033\,333\,3 & -0.066\,666\,7 & 0.333\,333 & 0 & 0 \\ 0 & 7.003\,33 & -0.293\,333 & -0.333\,333\,3 & 1 & 0 \\ 0 & -0.190\,000 & 10.020\,0 & -.099\,999\,9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

En seguida se usa a_{22} como pivote y x_2 se elimina de los otros renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.068\,057 & 0.333\,175 & 0.004\,739\,329 & 0 \\ 0 & 1 & -0.041\,706\,1 & -0.004\,739\,33 & 0.142\,180 & 0 \\ 0 & 0 & 10.012\,1 & -0.100\,90 & 0.027\,014\,2 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, se usa a_{33} como pivote y x_3 se elimina de los renglones restantes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.332\,489 & 0.004\,922\,27 & 0.006\,798\,13 \\ 0 & 1 & 0 & -0.005\,164\,4 & 0.142\,293 & 0.004\,183\,46 \\ 0 & 0 & 1 & -0.010\,077\,9 & 0.002\,698\,16 & 0.099\,880\,1 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la inversa es:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.332\,489 & 0.004\,922\,27 & 0.006\,798\,13 \\ -0.005\,164\,4 & 0.142\,293 & 0{,}004\;\;183\,46 \\ -0.010\,077\,9 & 0.002\,698\,16 & 0.099\,880\,1 \end{bmatrix}$$

Ahora, la inversa se multiplica por el primer vector de términos independientes, obteniendo la solución:

$X_1 = 7.85 (0.332\ 489) – 19.3 (0.004\ 922\ 97) + 71.4 (0.006\ 798\ 13)$

$= 3.000\ 411\ 81$

$X_2 = 7.85 (– 0.005\ 164\ 4) – 19.3 (0.142\ 293) + 71.4 (0.004\ 183\ 46)$

$= – 2.488\ 096\ 40$

$X_3 = 7.85 (- 0.010\ 077\ 9) – 19.3 (0.002\ 698\ 16) + 71.4 (0.099\ 880\ 1)$

$= 7.000\ 253\ 14$

La segunda solución, simplemente se obtiene realizando otras multiplicaciones

$X_1 = 20 (0.332\ 489) + 50 (0.004\ 922\ 97) +15 (0.006\ 798\ 13)$

$= 6.997\ 900\ 45$

$X_2 = 20 (– 0.005\ 164\ 4) + 50 (0.142\ 293) + 15 (0.004\ 183\ 46)$

$= 7.074\ 113\ 9$

$X_3 = 20 (- 0.010\ 077\ 9) + 50 (0.002\ 698\ 16) + 15 (0.099\ 880\ 1)$

$= 1.431\ 551\ 50$